

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Compito n. 1 - 16 Ottobre 2012

Il candidato svolga il seguente tema utilizzando al massimo 3 facciate di foglio a protocollo e svolga almeno uno degli esercizi proposti.

Tema. Il candidato illustri un problema aperto di fisica e/o astronomia e descriva come modelli teorici, esperimenti di laboratorio e/o osservazioni astronomiche possano permettere di progredire nella comprensione di quel problema.

Esercizio 1. Un elettrone interagente con un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = B \mathbf{j}$ ha il suo spin inizialmente orientato lungo la direzione positiva dell'asse x , cioè si trova in un autostato di S_x con autovalore $\hbar/2$. Calcolare la probabilità di trovare l'elettrone con lo spin orientato lungo la direzione positiva dell'asse z . (Nell'Hamiltoniana ignorare tutti i termini, eccetto quelli derivanti dall'interazione del momento di dipolo magnetico dovuto allo spin con il campo magnetico, ovvero $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \omega S_y$.)

Esercizio 2. Un atomo di massa m ha la transizione ottica tra il livello fondamentale elettronico ed il primo livello eccitato a frequenza ω_0 e con tasso di decadimento naturale Γ_{sp} . L'atomo si muove con velocità v ($v \ll c$) in verso opposto ad un fascio di fotoni con energia $\hbar\omega$.

1) Quanto deve valere l'energia dei fotoni per avere il massimo rate di assorbimento da parte dell'atomo?

2) In media, l'atomo viene rallentato da ogni evento di assorbimento di un fotone seguito da emissione spontanea. Calcolare la decelerazione media per evento.

Esercizio 3. Nel decadimento di una particella in due fotoni l'angolo di apertura è 32 gradi e le energie misurate dei due fotoni sono rispettivamente 200 MeV e 300 MeV. Determinare la massa della particella originaria e la sua quantità di moto nel sistema del laboratorio, prima del decadimento.

Esercizio 4. La misura della velocità di recessione di 5 galassie in un ammasso fornisce velocità pari a 9700, 8600, 8200, 8500 e 10000 km/s. Si determini:

1) la distanza dell'ammasso se la costante di Hubble vale $H_0 = 70$ km/s/Mpc

2) l'ordine di grandezza della massa dell'ammasso, se la distanza media delle galassie dal centro dell'ammasso è di circa mezzo grado.

Esercizio 5. Per un gas perfetto, una trasformazione adiabatica implica la relazione $PV^\gamma = \text{costante}$, dove γ dipende dal carattere atomico o molecolare del gas. Consideriamo una espansione adiabatica di una massa di aria che sta salendo di altitudine e trattiamo l'aria come un gas perfetto di molecole biatomiche ($\gamma = 7/5$) di massa $m = 4 \times 10^{-26}$ Kg. Calcolare di quanto diminuisce la temperatura con l'altezza h , assumendo che la pressione $P(h)$ diminuisca seguendo la legge di Stevino dell'idrostatica. È possibile darne l'ordine di grandezza su basi puramente dimensionali?

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Test n. 1 - 16 October 2012

The candidate should write an essay on the following topic using a maximum of three sides of the given sheets of paper and should also resolve at least one of the proposed problems.

Essay. The candidate should discuss an open problem in Physics and/or Astronomy and describe how theoretical models, laboratory experiments and/or astronomical observations could allow to progress in its understanding.

Problem 1. An electron under the influence of a uniform magnetic field $\mathbf{B} = B \mathbf{j}$ has its spin initially pointing in the positive x direction. Therefore, it is in an eigenstate of S_x , with eigenvalue $\hbar/2$. Calculate the probability of finding the electron with its spin pointing in the positive z direction. (Ignore all Hamiltonian terms apart those from the interaction between the dipole magnetic moment due to spin and the magnetic field, therefore $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \omega S_y$.)

Problem 2. An atom with mass m has the optical transition between the ground and the first excited electronic states with frequency ω_0 and natural decay rate Γ_{sp} . The atom is moving with a velocity v ($v \ll c$) against a beam of photons with energy $\hbar\omega$.

- 1) What is the photon energy that leads to the maximum absorption rate by the atom?
- 2) On average, the atom motion is slowed down by each absorption event followed by spontaneous emission. Evaluate the mean deceleration per event.

Problem 3. In the decay of a particle in two photons the opening angle is 32 degrees and the measured photon energies are 200 MeV e 300 MeV, respectively. Determine the particle mass and its momentum in the laboratory system before the decay.

Problem 4. The measurement of the recession velocities of 5 galaxies in a cluster provides values of 9700, 8600, 8200, 8500 e 10000 km/s. Compute:

- 1) the distance of the cluster if the Hubble constant is $H_0 = 70$ km/s/Mpc
- 2) the order of magnitude of the cluster mass if the average distance of the galaxies from the cluster center is half of a degree.

Problem 5.

An ideal gas, when performs an adiabatic process, satisfies the relation $PV^\gamma = \text{constant}$, where γ depends on the atomic or molecular nature of the gas. Let us now consider the adiabatic expansion of an ascending mass of air, assuming the air is an ideal gas made of diatomic molecules ($\gamma = 7/5$) with mass $m = 4 \times 10^{-26}$ Kg. The candidate should evaluate the rate at which the temperature falls with height h , assuming that the pressure $P(h)$ falls following hydrostatics (Stevin law). Is it possible to evaluate the order of magnitude of the falling rate of T , using dimensional arguments?

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Compito n. 2 - 16 Ottobre 2012

Il candidato svolga il seguente tema utilizzando al massimo 3 facciate di foglio a protocollo e svolga almeno uno degli esercizi proposti.

Tema. Si introduca una tematica di ricerca in Fisica e/o Astronomia, e si descriva una idea di ricerca (teorica, sperimentale, o entrambe) che ne potrebbe permettere un sostanziale sviluppo.

Esercizio 1. $\psi(x, t)$ è una soluzione dell'equazione di Schrödinger in una dimensione per una particella libera di massa m e come condizione iniziale si ha $\psi(x, t = 0) = Ae^{-x^2/a^2}$

- 1) Determinare l'ampiezza di probabilità a $t = 0$ nello spazio degli impulsi
- 2) Determinare $\psi(x, t)$.

Esercizio 2. Si consideri un gas di $N=100$ fermioni identici non interagenti in un potenziale armonico unidimensionale con frequenza $\omega_0=2\pi \times 1$ kHz.

- 1) Calcolare il potenziale chimico a $T=0$ K.
- 2) Calcolare il numero medio di particelle nello stato di energia $E = \hbar\omega_0(p + \frac{1}{2})$, con $p=120$, a $T=500$ nK, approssimando il potenziale chimico con quello a $T = 0$ K.

Esercizio 3. Nella reazione ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ viene prodotto Trizio radioattivo. L'isotopo ${}^3\text{He}$ si trova nell'Elio naturale nella proporzione di circa 1.4 parti per milione.

- (a) Sapendo che le energie di legame del Trizio e del ${}^3\text{He}$ valgono rispettivamente 2.827 MeV/nucleone e 2.573 MeV/nucleone, calcolare il Q -valore della reazione (energia resa disponibile) e l'eventuale energia di soglia. ($m_p = 938.27$ MeV/ c^2 , $m_n = 939.57$ MeV/ c^2)
- (b) La reazione di cui sopra ha una sezione d'urto di 1 barn per neutroni di energia cinetica 1 MeV; calcolare la massa di Trizio prodotta da un flusso di intensità $I = 1 \cdot 10^{15}$ neutroni/s che incide per 10h su un bersaglio di He naturale di spessore 1 cm e densità pari a 1.8 mg/cm³.
- (c) Sapendo che il Trizio ha un tempo di dimezzamento di 12.3 anni, calcolare l'attività del bersaglio dopo l'irraggiamento.

Esercizio 4. Il raggio della sfera di influenza gravitazionale di un buco nero al centro di una galassia, R_{BH} , si può stimare come quella distanza dal centro a cui la velocità di rotazione circolare dovuta al solo buco nero è uguale a σ_* , dispersione di velocità delle stelle nella galassia. Si determini la distanza massima a cui si può risolvere spazialmente R_{BH} per un buco nero di massa $M_{BH} = 3 \times 10^9 M_\odot$ in una galassia con $\sigma_* = 300$ km/s, se si osserva a $\lambda = 5000\text{Å}$ con il telescopio spaziale Hubble. Si consideri il telescopio limitato per diffrazione, e di diametro pari a $d = 2.5$ m.

Esercizio 5. Mostrare che il moto di un punto materiale soggetto a una forza centrale è un moto confinato in un piano. Poi, assumendo che la forza centrale dipenda solo dalla distanza r dal centro della forza, scrivere l'equazione di moto per $r(t)$ e discuterla. In particolare, se il punto materiale è soggetto ad una forza attrattiva della forma $-c/r^\alpha$, per quali valori di α si può avere un moto orbitale stabile?

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Test n. 2 - 16 October 2012

The candidate should write an essay on the following topic using a maximum of three sides of the given sheets of paper and should also resolve at least one of the proposed problems.

Essay. Introduce a research theme in Physics and/or Astronomy, and describe a research idea (theory, experiment, or both) that might potentially lead to its substantial development.

Problem 1 $\psi(x, t)$ is a solution of the Schrödinger equation for a free particle of mass m in one dimension and as boundary condition we have $\psi(x, t = 0) = Ae^{-x^2/a^2}$

- 1) At time $t = 0$ find the probability amplitude in momentum space
- 2) Find $\psi(x, t)$.

Problem 2. Consider $N=100$ identical, non-interacting fermions in a one-dimensional harmonic potential with frequency $\omega_0=2\pi \times 1$ kHz.

- 1) Calculate the chemical potential at $T=0$ K.
- 2) Calculate the mean number of particles in the state with energy $E = \hbar\omega_0(p + \frac{1}{2})$, with $p=120$, at $T=500$ nK, by approximating the chemical potential with that at $T = 0$ K.

Problem 3. In the reaction ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ Tritium radioactive nuclei are produced. The isotope ${}^3\text{He}$ has an abundance of 1.4 part per million in natural Helium.

(a) Calculate the reaction Q-value (available energy) and the energy threshold knowing that the binding energy of ${}^3\text{H}$ and ${}^3\text{He}$ are 2.827 MeV/nucleon and 2.573 MeV/nucleon, respectively.

($m_p = 938.27$ MeV/c², $m_n = 939.57$ MeV/c²)

(b) The reaction has a cross section of 1 barn for 1 MeV neutrons; calculate the mass of Tritium produced by a neutron flux $I = 1 \cdot 10^{15}$ neutrons/s impinging over 10h on a natural He target of thickness 1 cm and density 1.8 mg/cm³.

(c) Calculate the target activity after irradiation taking into account that Tritium has an half-life of 12.3 years.

Problem 4. The radius of the gravitational sphere of influence of a black hole at a center of a galaxy, R_{BH} , can be estimated as the distance from the center at which the rotational velocity due to the black hole is equal to σ_* , the velocity dispersion of the stars in the galaxy. Compute the maximum distance at which one can spatially resolve R_{BH} for a black hole with mass $M_{BH} = 3 \times 10^9 M_\odot$ in a galaxy with $\sigma_* = 300$ km/s, when observed at $\lambda = 5000\text{\AA}$ with the Hubble Space Telescope. Consider a diffraction limited telescope, with diameter $d = 2.5$ m.

Problem 5. The candidate should prove that a point particle, if subject to a central force, moves on a fixed plane. Then, assuming that the central force is isotropic, write the equation of motion for the distance $r(t)$ from the center and discuss it. In particular, if the point particle is subject to an attractive force $-c/r^\alpha$, what values of α may determine a stable orbital motion?

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Compito n. 3 - 16 Ottobre 2012

Il candidato svolga il seguente tema utilizzando al massimo 3 facciate di foglio a protocollo e successivamente svolga almeno uno degli esercizi proposti.

Tema. Scegliere un problema aperto della fisica o dell'astronomia contemporanea e:

- 1) Inquadrare il problema in maniera non specialistica e spiegare quali sono gli aspetti che lo rendono aperto e interessante.
- 2) Suggerire una o più direzioni di ricerca che potrebbero aiutare a chiarirlo.

Esercizio 1. Consideriamo una particella con numero quantico di spin $s = 1$. Ignoriamo tutti i gradi di libertà spaziali ed assumiamo che la particella interagisca con un campo magnetico esterno $\mathbf{B} = B \mathbf{i}$. L'operatore Hamiltoniano del sistema è $H = g\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$

- 1) Valutare esplicitamente le matrici di spin nella base $|s, m_z\rangle$ degli autostati di S^2, S_z
- 2) Se la particella si trova inizialmente nello stato $|1, 1\rangle$, determinare lo stato della particella a $t > 0$
- 3) Determinare la probabilità di trovare la particella nello stato $|1, -1\rangle$

Esercizio 2. Si consideri un ipotetico reticolo cristallino cubico tridimensionale, con passo reticolare $d=1$ nm, in cui vi è una densità $n=2 \times 10^{21}$ cm⁻³ di elettroni liberi.

- 1) A $T=0$ K il cristallo è un isolante o un conduttore? Motivare la risposta.
- 2) Quante bande di energia del cristallo sono occupate? Spiegate.

Esercizio 3. Un fascio di fotoni di energia 300 MeV e intensità $I = 10^8$ s⁻¹ incide su un bersaglio di idrogeno di spessore massico $\tau = 2$ mg/cm².

A seguito della reazione: $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$, un rivelatore cilindrico di raggio $r = 10$ cm posto ad una distanza $d = 50$ cm dal bersaglio rivela 300 pioni in un tempo di misura $\Delta t = 1000$ s.

- a) Calcolare l'energia di soglia della reazione.
- b) Calcolare la sezione d'urto totale (supposta isotropa).

$$m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2 \quad m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

Esercizio 4. Una stella di sequenza principale ha massa $M = 30 M_\odot$, luminosità $L = 10^5 L_\odot$ ed una temperatura superficiale $T = 4.5 \times 10^4$ K. Si determini la densità media della stella ed il tasso attuale (massa per unità di tempo) a cui sta convertendo H in He se l'efficienza delle reazioni nucleari è $\epsilon = 0.007$. Se la stella riuscisse a bruciare tutto l'idrogeno, quanto durerebbe la fase di sequenza principale?

Esercizio 5. Si abbia una particella di massa m che si muove lungo la direzione x e sia soggetta: (i) a una forza di richiamo che segue la legge di Hooke, con costante elastica k ; (ii) una forza di attrito viscoso, proporzionale alla velocità, di costante γ ; (iii) una forza esterna dipendente dal tempo, pari a $F \cos(\omega t)$. Trascurando il transiente, determinare l'ampiezza A e la fase ϕ del moto risultante, in funzione della pulsazione ω ; disegnare la funzione $A(\omega)$ e discuterla.

Dottorato di ricerca in Fisica e Astronomia - XXVIII ciclo - Università di Firenze
Test n. 3 - 16 October 2012

The candidate should write an essay on the following topic using a maximum of three sides of the given sheets of paper and subsequently should resolve at least one of the proposed problems.

Essay. The candidate should select an open problem of contemporary physics or astronomy and:

- 1) Introduce the problem in a non-specialized way and explain why it is an open and interesting problem.
- 2) Suggest one or more research directions which might help to clarify it.

Problem 1. Consider a particle with spin quantum number $s = 1$. Ignore all spatial degrees of freedom and assume that the particle is subject to an external magnetic field $\mathbf{B} = B \mathbf{i}$. The Hamiltonian operator of the system is $H = g\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$

- 1) Obtain explicitly the spin matrices in the basis of the \mathbf{S}^2, S_z eigenstates $|s, m_z\rangle$
- 2) If the particle is initially in the state $|1, 1\rangle$, find the evolved state of the particle at $t > 0$
- 3) What is the probability of finding the particle in the state $|1, -1\rangle$?

Problem 2. Consider an hypothetic crystal in three dimensions having a cubic lattice with lattice constant $d=1$ nm. In the crystal there are free electrons with a density $n=2 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$.

- 1) The crystal is an insulator or a metal at $T=0$ K? Explain why.
- 2) How many energy bands of the crystal are occupied? Explain.

Problem 3. A photon beam of energy 300 MeV and intensity $I = 10^8 \text{ s}^{-1}$ impinges on a hydrogen target of $\tau = 2 \text{ mg/cm}^2$ mass thickness.

As a result of the reaction $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$, a cylindrical detector of $r = 10 \text{ cm}$ radius, placed at a distance of $d = 50 \text{ cm}$ from the target, detects 300 pions in a measurement time of $\Delta t = 1000 \text{ s}$.

- a) Calculate the reaction threshold energy.
- b) Calculate the total cross section (supposing an isotropic behavior).

$$m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2 \quad m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

Problem 4. A main sequence star has mass $M = 30 M_\odot$, luminosity $L = 10^5 L_\odot$ and surface temperature $T = 4.5 \times 10^4 \text{ K}$. Compute the average density of the star and the current rate (mass per unit time) at which it is converting H into He, if the efficiency of nuclear reactions is $\epsilon = 0.007$. If the star can burn all its hydrogen, how long would the main sequence phase last?

Problem 5. Let us consider a particle of mass m , moving on the x axis and undergoing: (i) a restoring force, following the Hooke law with elastic constant k ; (ii) a drag, proportional to the velocity, with constant γ ; (iii) a time dependent driving force, equal to $F \cos(\omega t)$. Neglecting the short-time dynamics, determine the amplitude $A(\omega)$ and the phase $\phi(\omega)$ of the motion. Plot the function $A(\omega)$ and discuss it.